

Introducción a la Representación
de Sistemas Dinámicos
PS 2315
(Parte I. versión 2)

Prof. José Ferrer
Departamento de Procesos y Sistemas
Universidad Simón Bolívar

Trimestre Octubre 2013-Enero 2014

1 MODELOS DE SISTEMAS DINAMICOS

1.1 Introducción

- En el mundo actual, tanto en el área de los negocios, como en la industria y el gobierno, los proyectos en gran escala y de gran complejidad son la regla y no la excepción.
- Todo proyecto complejo requiere estudios previos a su construcción o mejora, denominados estudios pilotos.
- Los estudios pilotos se realizan utilizando la técnica llamada modelización, es decir, construcción de modelos donde se realiza el estudio con el fin de obtener conclusiones aplicables al sistema real.

- Construido el modelo, el proceso de ensayar en él una alternativa se llama **simular**. El conjunto de alternativas que se definen para su ensayo constituye la estrategia de la simulación.

- La simulación se emplea basicamente para :
 1. Validar cuan bueno es el modelo en cuanto a su capacidad para aproximar el comportamiento del sistema real.

 2. Evaluar el desempeño del sistema real (Análisis de Sistemas) y síntesis de los compensadores (Diseño de Sistemas) para mejorar u optimizar tal desempeño.

- El sistema en estudio, puede subdividirse en subsistemas interconectados, cada uno de los cuales a su vez está compuesto por elementos interconectados entre sí.

- El comportamiento dinámico del sistema dependerá del comportamiento de cada subsistema, de sus relaciones y del medio ambiente donde se le inserta.
- Los elementos y las relaciones que los ligan entre sí definen los subsistemas. Los subsistemas y las relaciones entre sí definen al sistema en estudio.
- Las relaciones entre los elementos del sistema constituyen la **estructura** del sistema. Un excelente medio para mostrar la estructura de un sistema es mediante su representación en "Diagramas de Bloques".
- La simulación de sistemas implica la construcción de modelos. El objetivo es averiguar que pasaría en el sistema si acontecieran determinadas hipótesis.
- Desde épocas muy antiguas, la humanidad ha intentado adivinar el futuro :¿qué va a pasar cuando

ocurra un determinado hecho histórico?. La simulación ofrece, sobre bases ciertas, esa predicción del futuro, condicionada a supuestos previos.

- Para predecir el futuro y entender el pasado se construyen los modelos, los cuales son normalmente una **simplificación de la realidad**.

- Puntos a recordar sobre modelos:

1. Son una simplificación de la realidad, por lo tanto, siempre el sistema real P_R será distinto a su modelo P_M , o sea

$$P_R = P_M + \Delta$$

donde Δ representa la incertidumbre siempre presente.

2. Todo modelo P_M debe ser lo suficientemente complejo para que aproxime bien al sistema real P_R , o sea, para que

$$\|P_R - P_M\| = \|\Delta\| \ll 1$$

la magnitud de la incertidumbre (error de modelaje) sea "pequeño".

Pero al mismo tiempo, P_M debe ser lo suficientemente simple para poder dar respuestas rápidas y económicas.

- Lo anterior se puede decir mas coloquialmente como:
 1. "El modelo que se construye debe tener en cuenta todos los detalles que interesan en el estudio para que realmente represente al sistema real (Modelo válido).
 2. Por razones de simplicidad deben eliminarse aquellos detalles que no interesan y que lo complicarían innecesariamente. Se requiere pues, que el modelo sea una fiel representación del sistema real. No obstante, el modelo no tiene porqué ser una réplica de aquél. **Consiste en una descripción del sistema, junto con un conjunto de reglas que lo gobiernan.**

- Todo modelo P_M de un sistema real P_R surge de un análisis de todas las variables (externas o internas) intervinientes en el sistema y de las relaciones

que se descubren existen entre ellas. Esto se lleva a cabo aplicando las leyes fisico-químicas típicas de las distintas ingenierías: KVL, KCL, leyes de Newton. Principio de D'Alembert, conservación de la masa, conservación de la energía, etc. (Lo veremos en los ejemplos pero no es el objetivo del curso).

- La descripción del sistema puede ser abstracta, física o verbal. Las reglas definen el aspecto dinámico del modelo. Se utilizan para estudiar el comportamiento del sistema real.
- Ejemplo de modelo físico: los túneles de viento donde se ensayan los aviones, los simuladores de vuelo, los canales de experiencia donde se ensayan los barcos, etc.

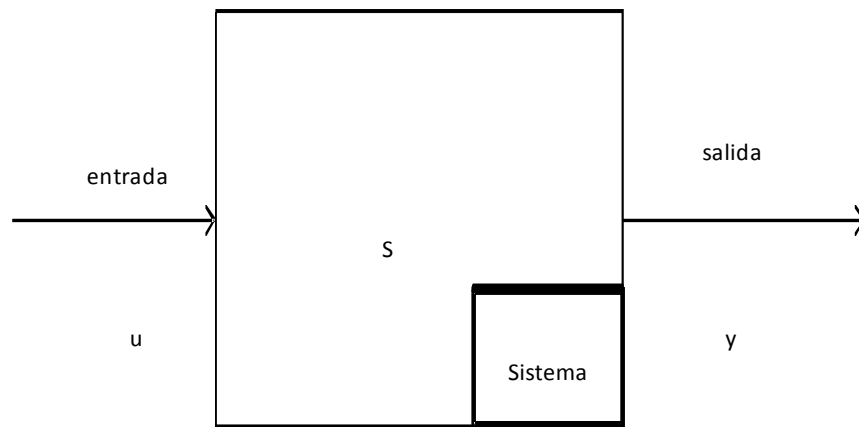
- Ejemplo de modelo abstracto o matemático, ecuaciones electricas de una red, las ecuaciones mecánicas de un sistema mecánico rotacional, modelos econométricos

donde, entre otras cosas, se pueden ensayar las consecuencias de medidas económicas antes de aplicarlas.

- Finalmente, dado un sistema, son muchas las representaciones o modelos que se pueden hacer de él. Depende de las características del sistema que interesan en el estudio, de la herramienta que se utiliza en el mismo e incluso de la modalidad personal del que lo construye.

1.2 Modelos de Sistemas Dinámicos

Sea $P = (U, Y, P)$ un sistema con eje de tiempo T . Aquí suponemos que el sistema P o es de tiempo continuo o discreto.



$$Y=S(u)$$

Figure 1: Modelo "Caja Negra" de un Sistema $S : U \rightarrow Y$

Aplicaremos la metodología "Top-down" para modelar sistemas. Esto significa que "estructurar" el sistema P mediante su representación en subsistemas o partes interconectadas y construir una representación en diagramas de bloques.

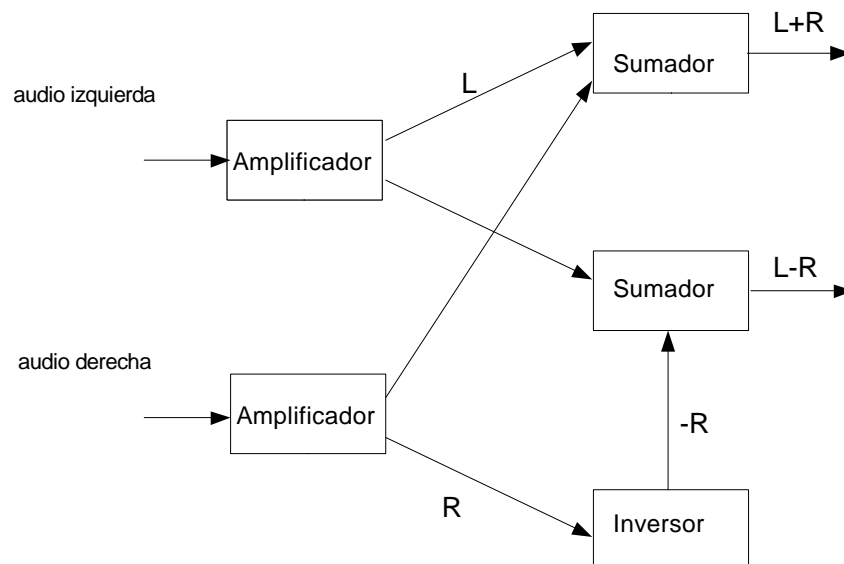
1.2.1 Diagrama de Bloques (Funcional) de un Sistema

- Diagramas de bloques constiuyen un método de estructurar, explicar y diseñar sistemas complejos (no necesariamente electrónicos) de una manera sencilla.
- El diagrama está constituido por bloques (unidades, elementos o subsistemas) etiquetados y conectados por flechas para demostrar la interconexión e interrelación entre ellos.

- Nos indican que cada bloque tiene una entrada y cómo se procesa dicha señal para generar la señal de salida de cada uno de ellos.
- No es necesario saber en esta etapa cómo cada bloque realiza internamente su tarea. Esto lo aprenderán en cursos de redes eléctricas, electrónica, procesamiento digital de señales, telecomunicaciones y control principalmente que estudiarán durante la carrera.
- ¿Qué características debe poseer un buen diagrama de bloques funcional?
 - Mostrar todos los principales componentes o unidades del sistema
 - Las interfaces al mundo real
 - Las interfaces entre los distintos subsistemas o componentes

- Indicar claramente las interfaces de potencia, datos y estructuras
- debe responder claramente como los objetivos del sistema se cumplen
- fácil de leer.

Example 1 *Un sistema de telecomunicaciones sencillo como se muestra en la figura.*



Transmisor sencillo de FM estéreo

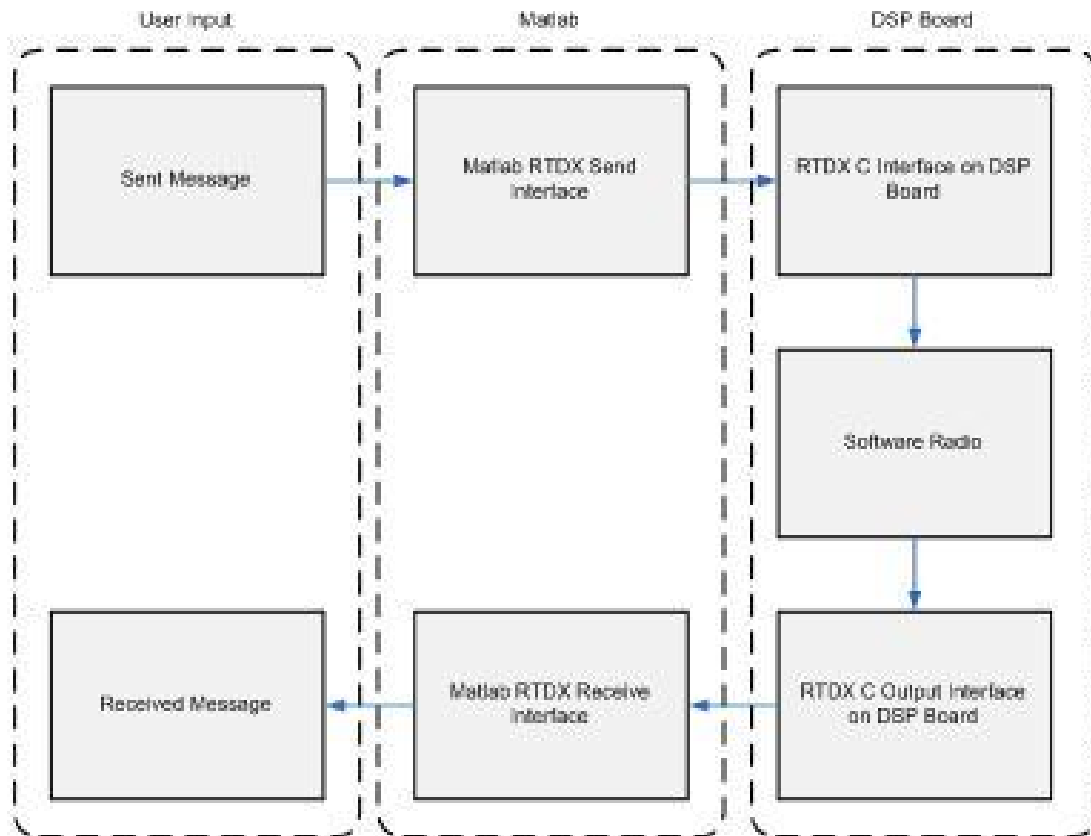


Figure 2: Interface de prueba de software para radio

Example 2 Sistema: *Interface de prueba de software para radio*

Interpretando un diagrama de bloques

- Los diagramas de bloques son representaciones esquemáticas de modelos matemáticos
- Las unidades que lo constituyen representan entidades matemáticas
- Pueden ser rearrregalados para ayudar en la simplificación de las ecuaciones que se usan para modelar el sistema
- Nos concentraremos en los diagramas que se emplean en telecomunicaciones y control principalmente.

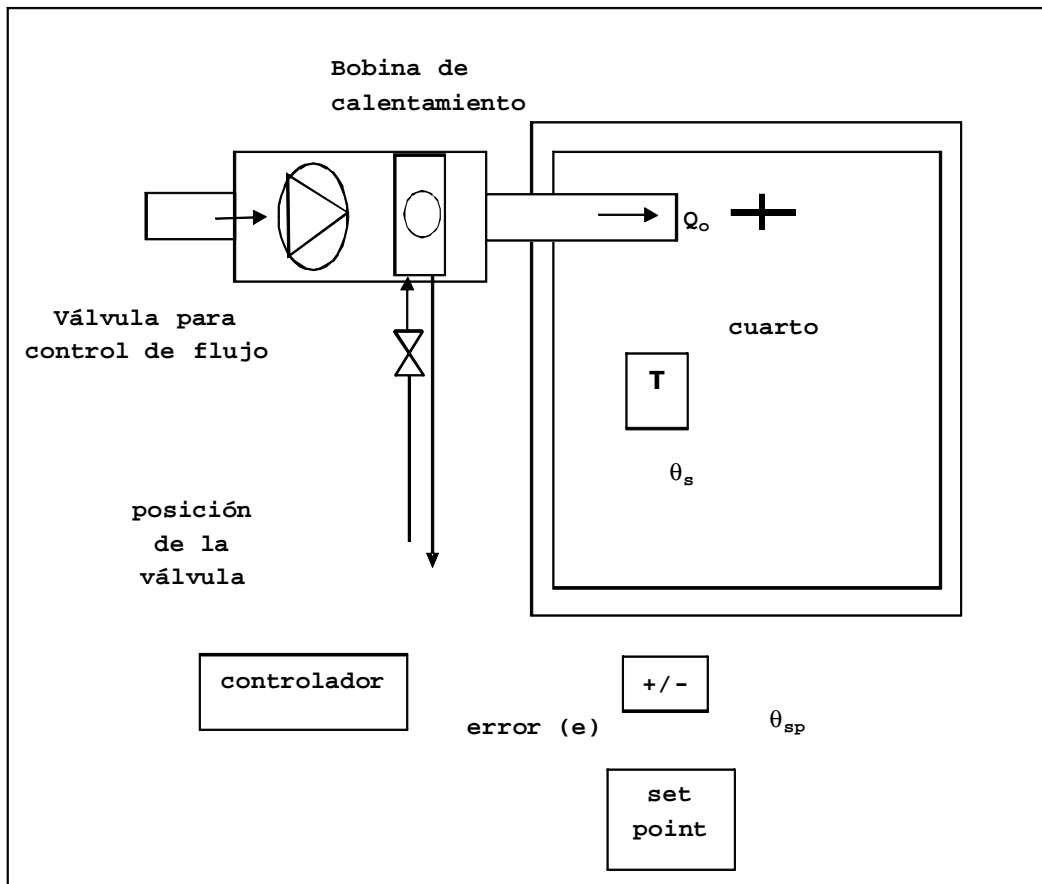
Variables en el diagrama de bloque

- Las variables o señales se representan por flechas en el diagrama.

- Las variables corresponden a una cantidad física medibles aunque esto último no es necesario.
- Las variables deben tener sus unidades físicas (Importante pero no enfatizaremos este punto en el curso)

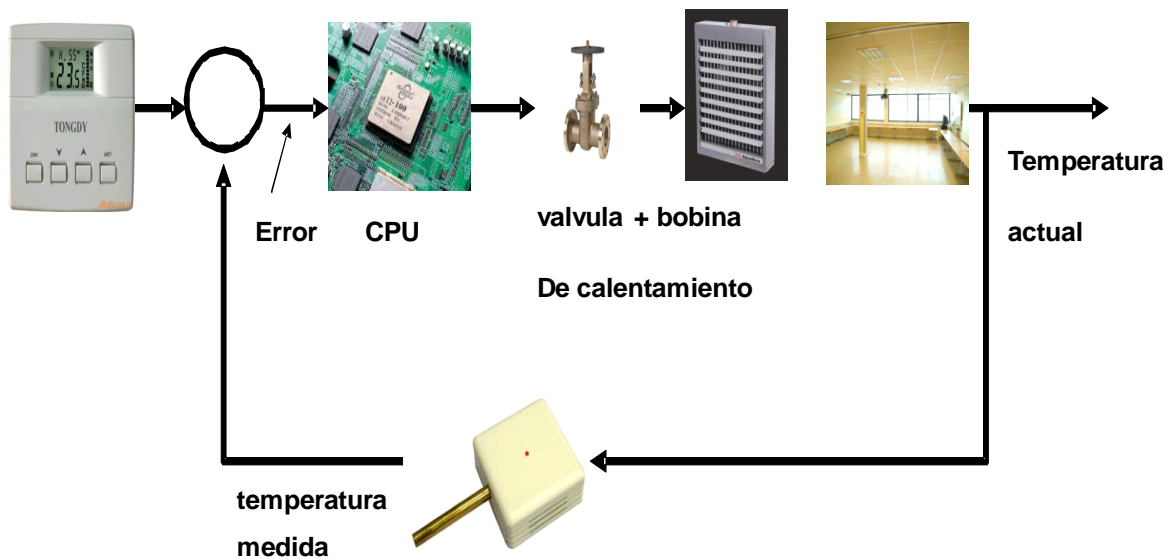
Example 3 *Considere el diagrama de bloques de un sistema de control de temperatura de un cuarto.*

En primer lugar se presenta el modelo físico del sistema



Modelo Físico de un sistema de control de temperatura en un cuarto

Ahora se presenta una representación en diagramas de bloques



Diagramas de bloques (funcional) del sistema de control de temperatura en un cuarto

1.2.2 Interconexión de Sistemas

A continuación las tres conexiones básicas de sistemas dinámicos.

Consideren dos sistemas P_1, P_2 donde

$$P_i = (U_i, Y_i, P_i)$$

para $i = 1, 2$.

Conexión en Serie o Cascada Dos sistemas (procesos o plantas) se dicen que están conectados en serie o cascada si la salida de uno de los sistemas es la entrada del otro. (ver la figura (a)). O sea, el sistema resultante de dicha interconexión se construye a partir de:

$$U_1 \xrightarrow{P_1} Y_1 \subset U_2 \xrightarrow{P_2} Y_2$$

Y de las reglas de interconexión:

1. $U = U_1$, por lo tanto, $u = u_1$
2. $Y_1 \subset U_2$, o sea, $u_2 = y_1$
3. $Y_2 = Y \Rightarrow y = y_2$

Por lo tanto, el sistema resultante es $P_{serie} : U \rightarrow Y$ donde para toda $u \in U$

$$\begin{aligned} y &= P_2 [P_1 (u)] \\ &= P_2 \circ P_1 (u) \\ &= P_{serie} (u) \end{aligned}$$

Esto es:

$$P_{serie} = P_2 \circ P_1$$

donde \circ representa composición de operadores (funciones).

Conexión en Paralelo Dos sistemas (procesos o plantas) se dicen que están conectados en paralelo si ambos sistemas tienen una misma entrada y las salidas se suman. (ver la figura (b)). O sea, el sistema resultante de dicha interconexión se construye a partir de:

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{P_1} & Y_1 \\ & & + \\ U & \xrightarrow{P_2} & Y_2 \end{array}$$

Y de las reglas de interconexión:

1. $U = U_1 = U$, por lo tanto, $u = u_1 = u_2$

2. $Y = Y_1 + Y_2$, o sea, $y = y_1 + y_2$

Por lo tanto, el sistema resultante es $P_{paral} : U \rightarrow Y$ donde para toda $u \in U$

$$\begin{aligned}y &= P_2(u) + P_1(u) \\ &= [P_2 + P_1](u) \\ &= P_{paral}(u)\end{aligned}$$

Esto es:

$$P_{paral} = P_2 + P_1$$

donde $+$ representa suma de operadores (funciones).

Interconexión en retroalimentación

- En las conexiones serie y paralelo, la entrada o la salida del sistema resultante se obtiene seleccionando o combinado las entradas o salidas de estos.
- En la conexión en retroalimentación se requiere de una nueva señal de entrada al sistema resultante denominada señal de referencia, r .

- No se puede encontrar por ahora una relación "decente" entre la referencia y salida de la conexión resultante.

Dos sistemas (procesos o plantas) se dicen que están conectados en retroalimentación (negativa) si la entrada del primer sistema es la resta de la referencia y la salida del segundo sistema, mientras que la entrada del segundo es la salida del primero. (ver la figura (c)). O sea, el sistema resultante de dicha interconexión se construye a partir de:

$$P_{fb} : U \longrightarrow Y$$

Y de las reglas de interconexión:

1. $U_1 = R + Y_2$, o sea, $u_1 = r - y_2$, donde R es el espacio de las posibles señales de referencia.
2. $Y_1 \subset U_2$, o sea, $u_2 = y_1$

$$3. Y_1 = Y \Rightarrow y = y_1$$

Por lo tanto, el sistema resultante $P_{fb} : R \rightarrow Y$ donde para toda $u \in U$

$$\begin{aligned} y &= P_1 (r - y_2) \\ &= P_1 [r - P_2 (y)] \end{aligned}$$

Y hasta aquí llegaríamos para sistemas de naturaleza arbitraria. Si P_2 es lineal

$$y = P_1 (r) - P_1 [P_2 (y)]$$

O sea

$$y + P_1 \circ P_2 (y) = P_1 (r)$$

Si

$$I : Y \rightarrow Y$$

es el operador identidad (un simple cable), entonces

$$y + P_1 \circ P_2 (y) = [I + P_1 \circ P_2] (y)$$

y si $[I + P_1 \circ P_2]$ tiene un operador inverso (llamado sistema inverso) $[I + P_1 \circ P_2]^{-1}$ se obtiene

$$\begin{aligned} [I + P_1 \circ P_2](y) &= P_1(r) \\ y &= [I + P_1 \circ P_2]^{-1} \circ P_1(r) \\ &= P_{fb}(r) \end{aligned}$$

O sea

$$P_{fb} = [I + P_1 \circ P_2]^{-1} \circ P_1$$

Remark 4 *Lo importante es : a) la definición de las interconexiones, b) establecer las reglas de interconexión y c) ver como puede representarse formalmente el sistema resultante. Esto se simplificará mucho para los sistemas lineales e invariantes en el tiempo que estudiaremos en este curso. (No se angustien con los detalles del caso de retroalimentación que puede resultar algo difícil de seguir).*

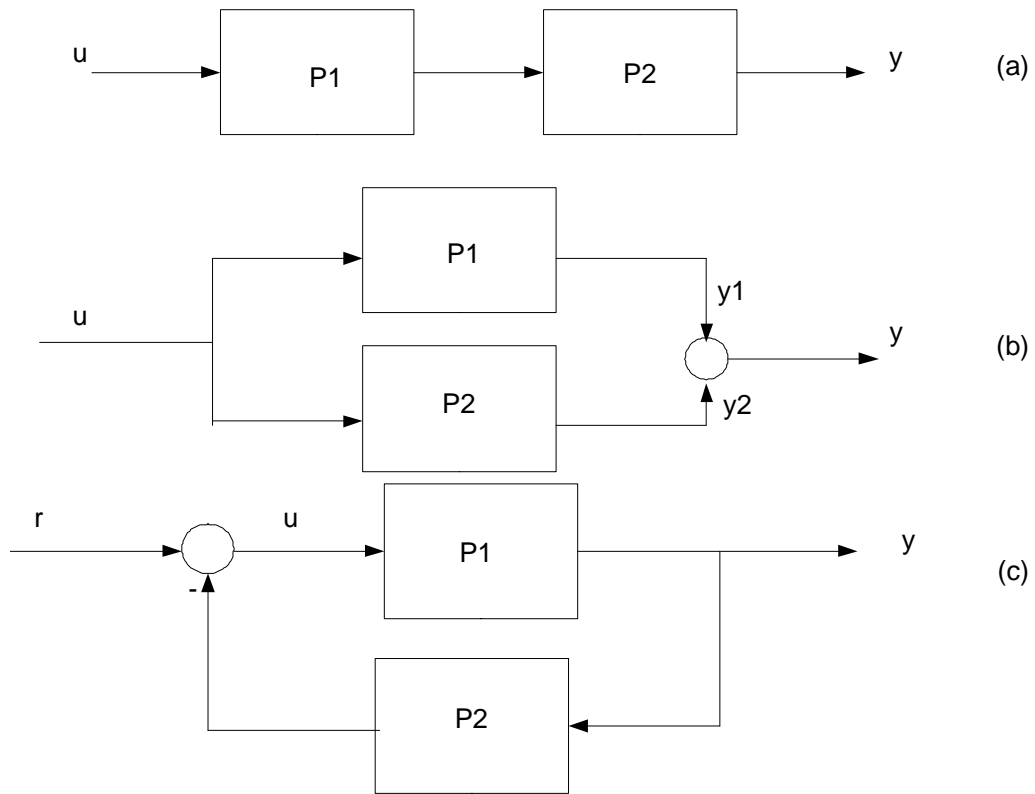


Figure 3: Interconexión de sistemas. a) conexión en serie, b) conexión en paralelo, c) Conexión en realimentación negativa